BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2014

MEXANİKA

UOT 532.59; 532.595

ÖZLÜ-ELASTİK BORUDA SIXILMAYAN QABARCIQLI MAYENİN PULSVARİ HƏRƏKƏTİ

R.ƏKBƏRLİ
Bakı Dövlət Universiteti
akbarli89@mail.ru

Deformasiya olunan borulardakı mayedə dalğalar kifayət qədər aktual problemdir. Burada qəbul olunur ki, birölçülü yaxınlaşmada borunun uzunluğu onun radiusundan kifayət qədər böyük olduqda bu məsələ"maye-örtük" sistemi ilə eynilik təşkil edir. Hal-hazırda bu cür məsələlər hidrodinamikanın geniş işlənmiş sahələridir. Lakin bir sıra materialların özlü elastikliyi və ikifazalı mayenin sıxılması az öyrənilmişdir.

Açar sözlər : ikifazalı maye, qabarcıqlar, özlülük, pulsvari axın, ortotropiya.

En kəsiyi özlü-elastik olan boruda sıxılmayan qabarcıqlı mayenin pulsvari hərəkəti araşdırılır. Verilən sərhəd şərtlərində təzyiq, sürət, sıxlıq və boru divarının radial yerdəyişməsinin təyini ixtiyari relaksasiya olunan nüvə üçün analıtik düsturlar alınmışdır. Məsələnin riyazi hesablanması sabit nüvə üçün aparılır. İndiki zamana kimi əsası L.Eyler, İ.Qromeka, N.E.Jukovskinin fundamental işlərində bu tip məsələlərin mühümlüyü, xüsusiyyətləri hidrodinamikanın geniş işlənmiş sahələrindən biri hesab olunur. Ancaq bu tip məsələlərdə əsas maraq kəsb edən mayenin reoloji xassələri ilə örtük materialı arasında əlaqənin xüsusiyyəti kifayət qədər öyrənilməmişdir. Təqdim olunan işdə dartılma effekti nəzərə alınan özlü elastik boruda axan özlü elastik sıxılmayan mayedə kiçik amplitudlu dalğaların yayılması məsələsinin riyazi əsaslandırılmasına və həllinə həsr olunur. Bu cür təsvir oxşar tip məsələləri ümumiləşdirir və onların həlli metodlarını inkişaf etdirir.

1. Mayenin riyazi modeli. Relaksion mühitin kifayət qədər mühüm nümunəsi olan kiçik qaz qabarcıqlı ikifazalı mühit birləşməsini göstərmək olar. Təcrübi və nəzəri araşdırmalar göstərir ki, ikifazalı mayenin axını məsələsini həll edərkən, nəzərə almaq lazımdır ki, bu cür mühitlər başqa ikifazalı mühitlərdən onunla fərqlənirlər ki, daşınan fazanın istilik tutumu dispersion fazanın istilik tutumunu dəfələrlə üstələyir, daşınan fazanın kütlə tərkibinə görə həcm vahidində onu üstələyir.

Keçirilən ehtimallar çərçivəsində, hidrodinamikanın tənlikləri impulsun aşağıdakı tənliklərindən ibarətdir [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

Kəsilməzlik tənliyi:

$$\frac{2}{R}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

və qatışığın reologiya tənliyi:

$$p = a^2 \rho + \frac{\xi}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{3}$$

Burada *u(x,t)*-qatışığın axma sürətidir, *p(x,t)* – hidrodinamik təzyiq, *ρ(x,t)* - qatışığın sıxlığıdır [1].

$$a^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})}\left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{10}-\rho_{20}}\right)\frac{p}{\rho_{10}} \tag{4}$$

Sonuncu ifadədə a^2 - eynikütləli səs sürətinin kvadratıdır.

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \quad (\alpha_{10} + \alpha_{20} = 1), \tag{5}$$

$$\xi = \frac{4}{3}\frac{\mu(1-\alpha_{20})}{\alpha_{20}} \tag{6}$$

Burada ξ-həcmi özlülüyün ifadəsidir, μ - daşınan fazanın dinamik özlülüyü, α_{20} – qabarcıqların həcm tutumu, ρ_{10}, ρ_{20} –uyğun olaraq maye və qazın sıxlığıdır. Əgər qabarcıqların həcmi tutumu kifayət qədər kiçikdirsə, (α_{20}<<1) onda mühit bircins sayıla bilər. $\rho_{20} << \rho_{10}$ olan halda,

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \approx \alpha_{10}\rho_{10} \approx \rho_{10},$$

Bu cür mülahizə imkan verir ki, (4) və (6) ifadələrini kifayət qədər dəqiqliklə aşağıdakı kimi yazaq:

$$a^2 \approx \frac{\rho_0}{\alpha_{20}\rho_{10}}, \qquad \xi \approx \frac{4}{3}\frac{\mu}{\alpha_{20}}. \tag{7}$$

Bu zaman (7) -ifadəsinin birinci tənliyindən göründüyü kimi qarışığın sıxılması, təkcə onun qaz tutumu hesabına baş verir.

2. Borunun hərəkət tənliyi. Tutaq ki, həyəcanlanmamış halda düzoxlu, slindrik, *R* radiuslu, qalınlığı *h* olan boru verilmişdir. Sonra isə borunun hərəkət tənliyini yazırıq. Divarın materialının elastik ortotrop olduğunu fərz edirik,

h/R <<1

nisbəti ödənir və boru ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir. Bu şərtlər daxilində, aşağıdakı tənliyi istifadə edək $[2]$:

$$p = \frac{hE^{v}}{(1-v^{2})R^{2}} w + \rho_{*} h \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}}, \tag{8}$$

burada ρ_{*} - divarın sıxlığıdır, v –Puasson əmsalıdır. (8)-ifadəsindəki irsilik operatorunu aşağıdakı şəkildə yazaq $[2]$:

$$E^{v} w = E\left\{ w - \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau) w(x,\tau) d\tau \right\} \tag{9}$$

Haradaki, *Г(t-τ)*-nüvə relaksasiyasının fərqidir. Əgər (9) ifadəsini (8)-də nəzərə alsaq, nəticə olaraq alarıq:

$$p = \frac{hE}{(1-v^{2})R^{2}} \left\{ w - \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau) w d\tau \right\} + \rho_{*} h \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}}. \tag{10}$$

Bu ifadədə ikinci toplanan borunun inersiyasını ifadə edir. Onun təsiri adətən kifayət qədər kiçik sayılır və nəzərə alınmır. Beləliklə, hesab etmək olar ki, (1)–(3) və (10) ifadələri hidroelastikliyin qapalı sistemini təşkil edir. Bu maye-qaz mühitlərində boruda kiçik dalğaların yayılmasının təsviri üçün istifadə oluna bilər.

3. Məsələnin dalğavari həlli. Məlum olduğu kimi, mürəkkəb impulsların təsviri üçün dalğavari hərəkətlərə xas olan harmonik təhlildən istifadə olunur. Bu zaman mürəkkəb formalı impulslar düzülür və sinisoidal tərkibli Furye sırasını əmələ gətirir. Tənliyi təyin edərkən funksiyaların xətti və bircins olması nəzərə alınmalıdır. Dəyişənlərə ayırma üsulundan istifadə edərək, məsələnin həllini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$U = U_{1}(x)\exp(i\omega t), \qquad w = w_{1}(x)\exp(i\omega t),$$
$$\rho = \rho_{1}(x)\exp(i\omega t), \quad p = p_{1}(x)\exp(i\omega t). \tag{11}$$

İlk olaraq (10) dairəvi mötərəzədəki inteqral həddini hesablayaq. Bunun üçün (11)-in ikinci bərabərliyindən istifadə edək. Onda

$$-\int_{0}^{t} \Gamma(t-\tau) w(x,\tau) d\tau = -w_{1}(x)\int_{0}^{t} \Gamma(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Burada $t-\tau=\theta$ əvəzləməsindən istifadə etsək, yaza bilərik:

$$-w_{1}(x)\int_{\infty}^{0} \Gamma(\theta) e^{i\omega(t-\theta)} d\theta = w_{1}(x)\int_{0}^{\infty} \Gamma(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta.$$

Aşağıdakı əvəzləməni daxil etsək,

$$\alpha = \int_{0}^{\infty} \Gamma(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \tag{12}$$

və (10) –da inersiya həddini nəzərdən atsaq, alarıq:

$$p_1 = \frac{hE}{(1-\nu^2)R^2} w_1(1-\alpha).$$

Analoji qayda ilə yaza bilərik:

$$U_1(x) = \frac{hEi(1-\alpha)}{(1-\nu^2)R^2\rho_0\omega} w_1'(x)$$

$$w_1(x) = \frac{(1-\nu^2)R^2}{hE(1-\alpha)}\left\{a^2 + \frac{\xi i}{\rho_0}\omega\right\}\rho_1(x) \tag{13}$$

$$\rho_1(x) = \frac{i\rho_0}{\omega}U_1'(x) - \frac{2\rho_0}{R}w_1(x)$$

Burada $i = \sqrt{-1}$ xəyali vahiddir. Sonuncu tənlikləri bir tənliklə əvəz etsək, yaza bilərik:

$$\left\{-\frac{\xi}{\rho_0^2} + \frac{ia^2}{\rho_0\omega}\right\}\rho_1''(x) + \left\{\frac{1-\xi\omega^2}{\rho_0} + i\frac{2\omega(1-\nu^2)Ra^2}{hE(1-\alpha)}\right\}\rho_1(x) = 0$$

Bu ifadədə aşağıdakı işarələmələri qəbul etsək, (14) ifadəsini alarıq:

$$m_1 = w^2(1-\alpha+\frac{a^2}{c_0^2}),\ m_2 = \xi\frac{w^3}{\rho_0 c_0^2},\ m_3 = \xi\frac{w}{\rho_0},\ \delta^2 = \frac{m_1 + im_2}{a^2 + im_3}.$$

$$\rho_1'' + \delta^2\rho_1 = 0 \tag{14}$$

Burada *ρ''* ilə *ρ*–nın *x* koordinatına nəzərən ikinci tərtib törəməsi qeyd olunub. Dispersiya tənliyini həqiqi və xəyali hissələrə ayırıb, yaza bilərik:

$$\delta^2 = k_1 - ik_2$$

Burada,

$$k_1 = \frac{(m_1a^2 + m_2m_3) + \alpha_1(m_1m_3 - m_2a^2)}{(1-\alpha_0)(a^4 + m_3^2) + \alpha_1^2(a^4 + m_3^2)},\quad k_2 = \frac{(m_1m_3 - m_2a^2) - \alpha_1(m_2m_3 + m_1a^2)}{(1-\alpha_0)(a^4 + m_3^2) + \alpha_1^2(a^4 + m_3^2)}$$

δ-qiyməti üçün aşağıdakı şərt qəbul olunub:

$$\operatorname{Im}\delta < 0. \tag{15}$$

Ona görə aşağıdakı ifadəni almaq olar:

$$\delta = \delta_0 - i\delta_1.$$

Onda qarışıqda dalğanın sürəti:

$$c = \omega/\delta_0,$$

olar. (14) tənliyin ümumi həlli məlumdur və o, bu cür yazılır:

$$\rho = Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x},$$

Burada *A* və *B* -inteqrallanma sabitləridir. Ümumi halda kompleksdirlər və onlar məsələnin sərhəd şərtlərindən təyin olunur.

$$\rho(x,t) = \left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t). \tag{16}$$

Bu zaman (3) və (13) tənliklərində (16) ifadəsini nəzərə alsaq, müvafiq olaraq təzyiq, yerdəyişmə və sürət üçün alarıq:

$$p(x,t) = (a^2 + im_3)\left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t)$$

$$w(x,t) = \frac{(1-v)R^2}{(1-\alpha)hE}(a^2 + im_3)\left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t).$$

$$u(x,t) = \frac{\delta(a^2 + im_3)}{\rho_0\omega}\left\{Ae^{-i\delta x} - Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t).$$

4. Sərhəd məsələsinin həlli. Təzyiqin, qarışığın sürətinin onun sıxlığının və yerdəyişməsinin sonrakı təsviri üçün uzunluğu l olan sonlu boru üçün $x=0$ və $x=l$ olduqda müxtəlif sərhəd şərtlərini almaq olar. Tipik hallar göstərir ki, bu zaman boruya pulsvari təzyiq verilir.

$$p(0,t) = p^{\vee}\exp(i\omega t), \qquad (17)$$

$x=l$ olduqda təzyiq sıfra bərabərdir:

$$p(l,t) = 0 \qquad (18)$$

Sonsuz boru üçün $(l \to \infty)$, (15) və

$$\sin\delta l = \frac{e^{i\delta l} - e^{-i\delta l}}{2i}, \qquad \cos\delta l = \frac{e^{i\delta l} + e^{-i\delta l}}{2},$$

ifadələrini nəzərə alsaq $\rho(x,t)$, $P(x,t)$, $w(x,t)$, $U(x,t)$-üçün aşağıdakı düsturları alarıq:

$$\rho(x,t) = \beta\exp[(i(\omega t - \delta x)],$$

$$P(x,t) = \beta(a^2 + im_3)\exp[(i(\omega t - \delta x)],$$

$$u(x,t) = -\beta\frac{\delta}{\rho_0\omega}(a^2 + im_3)\exp[(i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x,t) = \beta\frac{(1-v^2)R^2}{(1-\alpha)hE}(a^2 + im_3)\exp[(i(\omega t - \delta x)].$$

Burada aşağıdakı əvəzləmə qəbul olunub:

$$\beta = \frac{P^{v}}{a^2 + im_3}$$

Eyler düsturuna əsasən, axtarılan funksiyaların amplitudaları üçün yazmaq olar ki,

$$|\rho| = \frac{p^{\vee}e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4 + m_3^2}}, \quad |P| = p^{\vee}e^{-\delta_1 x}$$

$$|u| = p^{\vee}\frac{e^{-\delta_1 x}}{\rho_0\omega}\sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}, \quad |w| = p^{\vee}e^{-\delta_1 x}\frac{(1-v^2)R^2}{hE}\sqrt{\frac{(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^4}{\left((1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2\right)^2}}$$

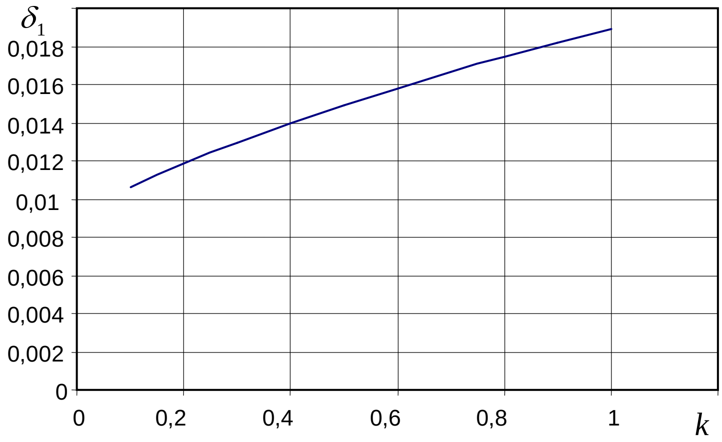
Dalğanın sürəti $c = \omega/\delta_0$ və dalğanın sönməsi δ_1-in α_{20} asılılığını nəzərə alaraq, sonda alınan düsturlar axtarılan funksiyalarda yerinə yazılır.

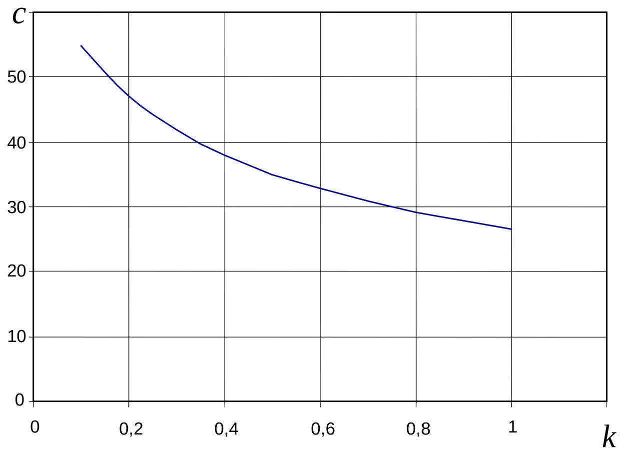
Ədədi eksperiment. Ədədi eksperiment üçün sistemin parametrlərini verməliyik. Örtüyün materialını rezin qəbul edək: $E = 4\cdot10^5\ N/m^2$, $v=0.1$, *h=0.002m, R=0.012m,* $\omega=10^{-1}san^{-1}$, $P^{v}=14\cdot 10\ N/m^{2}$. Tərkibində az miqdarda hava qabarcıqları olan $\alpha_{20}=\{10^{-1}\}$ su qarışığını araşdıraq. Bu cür modelləşdirmə olduqca mühümdür, çünki su müəyyən mənada bir çox fiziki-kimyəvi, bioloji və texniki proseslər zamanı böyük rol oynayır. Digər tərəfdən suda həmişə qatışıqlar, o cümlədən hava qabarcıqları mövcud olur. Xarakterik ölçülər: $\rho_0=10^3$ kq/m^3, $\mu=0.11\cdot10^{-2}$ kq/m·san, $p_0=10^5\ N/m^2$. Hesablamalar zamanı, (12)-ifadəsində $\Gamma(\theta)-$sabit götürülür:

$$\Gamma(\theta)=g$$

$$\alpha=g\int_0^\infty \exp(-i\omega\theta)d\theta=\frac{-g}{i\omega}e^{i\omega\theta}\Big|=\frac{g}{i\omega}=-i\frac{g}{\omega}=-ik$$

Burada $k=\dfrac{g}{\omega}$ işarə olunub.





Nəticə. Beləliklə, sistemin əməliyyat rejiminə və parametrlərin seçilmiş qiymətlərinə əsasən aşağıdakı nəticələri alarıq:

- dalğaların yayılma sürəti əhəmiyyətli dərəcədə kiçilir;
- qarışığın axın sürətinin amplitudu (və deməli, sərfi) artır;
- müəyyən olunmuşdur ki, qarışığın axın xarakterinə onun özlülüyü, demək olar ki, təsir etmir.

ƏDƏBİYYAT

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа .Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976, 416с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука , 1977, 401с.
3. Нигматулин Р.И. Динамики многофазных сред. Ч.1, М., 1987, 464 с.

ПУЛЬСИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКО-УПРУГОЙ ТРУБЕ

Р.АКПЕРЛИ

РЕЗЮМЕ

Проблема распространения волн в деформируемых оболочках с протекающей в их полостях жидкостью является весьма актуальной. Здесь принято считать, что одномерное приближение, которое справедливо, когда длина трубки значительно больше ее радиуса, описывает основные свойства системы «оболочка-жидкость». К настоящему времени совокупность таких задач составляет широко разработанную область гидродинамики. Однако механизм ряда явлений, связанных с одновременным учетом двухфазности жидкости в купе с учетом ее сжимаемости, вязкости и вязко-упругости материала трубки, изучены недастаточно.

Ключевые слова: двухфазная жидкость, пузырьки, вязкость, пульсирующее течение, ортотропия.

PULSATING MOTION OF A NON-COMPRESSIBLE BUBBLE LIQUID IN THE VISCO-ELASTIC TUBE

R.AKBARLI

SUMMARY

The problem of wave propagation in deformable shells with flowing fluid in their cavities is quite popular. It is assumed that one – dimensional approximation is applicable when the tube length is much greater than its radius. Such approximation describes the basic properties of the “cover-fluid”. To date, the aggregate of such problems is a welldeveloped area of fluid dynamics. However, the mechanism of the phenomena associated with simultaneous consideration of two-phase fluid in the compartment considering its compressibility, viscosity and orthotropy of the material tube, is not well understood.

Key words*:* two-phase fluid, bubbly liquid, viscosity, pulsating flow, orthotropy

Redaksiyaya daxil oldu 06.10.2014-cü il
Çapa imzalandı: 29.11.2014-cü il